数理解析研究所講究録
478巻 1983年 93-103

Generic Bifurcations of Varieties I.

奈良女子大 理 泉屋周一
Shuichi Izumiya

§0. 序.

$f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ を C^∞-写像芽とする時，任意の $u\in(\mathbb{R}^r,0)$ に対して，"varieties" の芽 $f_u^{-1}(0)$ が定まる．ただし，$f_u(x)=f(x,u)$ と定義する。本稿では，$f_u^{-1}(0)$ の分岐に関していくつかの結果を紹介する．

定義 1. $f,g:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ を C^∞-写像芽とする．f,g が P-$\mathcal{K}$-equivalent (resp. $S.P$-$\mathcal{K}$-equivalent) とは，$(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)$ からそれ自身の上への diffeo 芽で $\Phi(x,u)=(\Phi_1(x,u),\phi(u))$ (resp. $\Phi(x,u)=(\Phi_1(x,u),u)$) の形をした物が存在して，$\Phi^*(I(f))=I(g)$ をみたす事である．ここで，$I(f)$ は，$f_1,\cdots,f_p$ で生成される局所環 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)=\{h\mid h:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to\mathbb{R}:C^\infty$-函数芽$\}$ のイデアルをあらわす。ただし，$f=(f_1,\cdots,f_p)$ とする．

定義 2. $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ について，
$\pi_f:(f^{-1}(0),0)\to(\mathbb{R}^r,0)$; $\pi_f(x,u)=u$ を f の

分岐写像芽とよぶ.

さらに, $f, g: (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して π_f, π_g が $\mathcal{A}$-equivalent とは, $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0)$ からそれ自身への diffeo 芽 Φ で, $\Phi(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$ をみたすものと, $(\mathbb{R}^r, 0)$ からそれ自身の上への diffeo 芽 ϕ が存在して, $\phi\circ\pi_f = \pi_g\circ\Phi$ をみたすこととする.

注意, 定義からあきらかに, f, g が r-$\mathcal{K}$-equivalent の時 π_f と π_g は $\mathcal{A}$-equivalent である. さらに, $\mathcal{A}$-equivalent class が π_f の等高線の位置と形を記述するので, それは, π_f の等高線即ち, $f_u^{-1}(0)$ の分岐を記述する.

さて, 純粋な幾何学的興味以外の Motivations について, いくつかのべる.

1) $f: (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ という C^∞-写像芽に対して, $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$ という径数付き常微分方程式系を考える. この方程式の定常解とは $\frac{dx}{dt} = 0$ (ie $f(x, u) = 0$) という集合 $\{(x, u)\}$ の事である.

2) n 種の商品があるとして, $P = (P_1, \cdots, P_n)$ をそれらの価格とすると, 価格 P に対して, 超過需要函数 $f(p) = (f_1(p), \cdots, f_n(p))$ が定まるが. Debreu [1] らによると, f は smooth にとってよい. 今, $f(p_0) = 0$ となる点 $P_0 = (P_{01}, \cdots, P_{0n})$ が均衡価格である. 従って, 他の外力が加った経済状態における均衡価格

が，ちょうど径数付けられた写像芽 $f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ の"varieties" $f^{-1}(0)$ の点である．

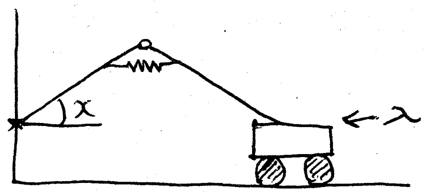
その他，偏微分方程式の解の分岐の研究や，Legendre特異点の研究への応用の可能性もある．

§1. Simple example.

ここでは，Golubitsky - Schaeffer [2] にそって，P-K-equivalence theoryの応用について，簡単な例をあげて解説する．残念ながら，経済学への応用は今のところ見出されていないので，弾性に関する例をあげる．

両端で圧縮力を受ける細棒の挙動をモデル化してみる．

今，以下の図の様なシステムを考える．



ここで，バネは2本の剛い棒を真直ぐに保とうとしている．バネの"弾性係数"を適当にとると，このシステムのポテンシャル・エネルギーは

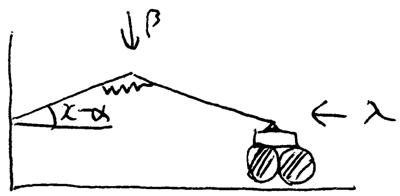
$$V = \frac{1}{2}x^2 + 2\lambda \cos x$$

であたえられる．このシステムがつりあっているとすると，equilibrium condition

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x - 2\lambda \sin x = 0 \qquad \text{— (*)}$$

があたえられる.

さて，このシステムに，上から β の力を加えると.



上図の状況になる. このときのポテンシャル・エネルギーは

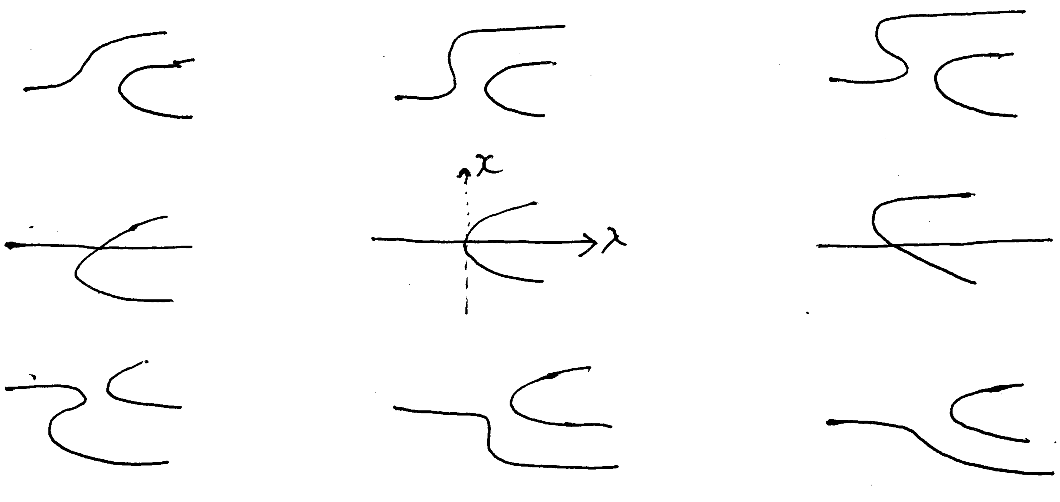
$$V = \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 + 2\lambda \cos x + \beta \sin x$$

であたえられ，さらに，equilibrium conditionは，4次以上の項を無視すると，

$$\frac{1}{3}\lambda x^3 - \frac{1}{2}\beta x^2 + (1-2\lambda)x + (\beta - \alpha) = 0 \qquad \text{— (**)}$$

で与えられる.

このシステムは，理想的には $x^3 - \lambda x$ とその universal unfolding $x^3 + \beta x^2 - \lambda x + \alpha$ で実現される. この，α，β を動かして，解の分岐を図示すると.



となる．

さて，このシステムは．E.C. Zeeman [3]によって，Catastrophe理論の応用として説明されているが．ここでは，それについてみてみよう．

上記のように，$x^3-\lambda x=0$ というシステムのperturbationには，α，β という2変数が必要であるが．Zeemanの議論では1変数で良いことになっている．それは以下の様に解釈される．このシステムをあらわすポテンシャルは

$$V_\lambda(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\lambda x^2$$

であるが，この函数を $\frac{1}{4}x^4$ の1径数変型とみてやる．この時，初等カタストロフ理論によると，$\frac{x^4}{4}$ は codimension 2であり．そのuniversal unfolding（右同値に対する）は

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\lambda x^2 + bx$$

である．

即ち，このポテンシャルのequilibrium condition

$$x^3 - \lambda x + b = 0$$

が，$x^3-\lambda x=0$ というシステムのuniversalなperturbationであるとZeemanは主張している．

事実，

$$x^3 - \lambda x + \beta x^2 = 0 \qquad \text{—— (1)}$$

という，$x^3-\lambda x=0$ のperturbationを考えてみると，

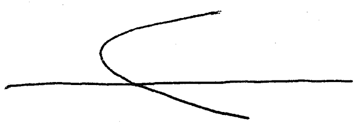
$$(\bigstar)\quad \begin{cases} X = x + \frac{1}{3}\beta \\ \Lambda = \lambda + \frac{1}{3}\beta^2 \\ \alpha = \frac{1}{3}\lambda\beta + \frac{2}{27}\beta^3 \end{cases}$$

と変換してやると，(1) は

$$X^3 - \Lambda X + \alpha = 0 \qquad \text{—— (2)}$$

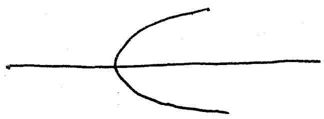
になる．

ところが，ここで，(1) の分岐状態を図示すると



$(\beta \neq 0)$

となり，また，(2) の分岐状態を図示すると



となる．これらの分岐状態はあきらかに異なっている．これは，(★) という変数変換の時に，β と λ を mix して変換したためにおこったのである．β と λ を mix して変換してよいというのは，初等カタストロフ理論を採用した事により保障されている．この様に，種々の分岐問題を研究するにあたり，本質的にそのシステムに含まれているパラメータ（この場合は λ にあたる）と perturb するパラメータを区別した，モデルを構成する必要がある．

§2. 分類結果

この節では，径数付けられた写像芽の P-K-同値による部分的分類の結果を報告する．証明は，この研究集会の性格上，いっさいあげない．

C^∞-写像芽 $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に対して，

$df_x: T_0\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r \to T_0\mathbb{R}^p$ を $df_x(v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_r)=\left(\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}\right)$，

$df_u: T_0\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r \to T_0\mathbb{R}^p$ を $df_u(v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_r)=\left(\sum_{j=1}^r w_j\frac{\partial f_\ell}{\partial u_j}\right)$

$(\ell=1,\dots,p)$ で定義する．さらに $df_u^K: \mathrm{Ker}\,df_x \to \mathrm{Coker}\,df_x$ を $df_u^K=\pi\circ df_u|\mathrm{Ker}\,df_x$ （$\pi: T_0\mathbb{R}^p\to\mathrm{Coker}\,df_x$: canonical projection）で定義する．

定義3．f が原点において Σ_s^k-型であるとは，$\mathrm{rank}(df_x)=\min(n,p)-k$，$\mathrm{rank}(df_u^K)=\min(r,p-\mathrm{rank}(df_x))-s$ である事とする．さらに f が原点で Σ_0^0-型の時，f は非特異であるという．

以下の定理は，P-K-同値に対応する陰関数定理である．

定理4．$f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ を非特異 C^∞-写像芽とする．

1) $n\geq p$ のとき，f は $(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_r)\mapsto(x_1,\dots,x_p)$ に s.P-K-同値

2) $n<p$ かつ $r\leq p-n$ のとき，f は $(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_r)\mapsto(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_r,0,\dots,0)$ に P-K-同値．

3) $n < p$ かつ $r > p-n$ のとき，f は $(x_1 \cdots x_n, u_1, \cdots u_r) \longmapsto (x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_{p-n})$ に P-$\mathcal{K}$-同値．

この定理により，非特異な写像芽は分類が終った．しかもそれらの Varieties は原点で分岐しないこともわかる．従って原点が特異点となっている写像芽の分類が問題である．

Notations： $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r) = \{ f \mid f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to \mathbb{R} : C^\infty \}$ ：局所環

$\mathfrak{m}_{n+r} = \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r) \mid f(0) = 0 \}$ ：$C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$ の maximal イデアル

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \ni g_1, \cdots, g_k$ に対して，

$\langle g_1, \cdots, g_k \rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)}$ ：$g_1, \cdots, g_k$ で生成される $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$-加群．

ただし，$C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) = \{ f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to \mathbb{R}^p : C^\infty$-写像芽$\}$．

この時，C^∞-写像芽 $f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して，

$$T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial u_r} \right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^r)} + I(f)\, C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$$

とおく．

定義5．$f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞-写像芽とする時，

$$P\text{-}\mathcal{K}\text{-}\mathrm{codim}(f) = \dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \big/ T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f)$$

を f の P-$\mathcal{K}$-codimension と呼ぶ．

ここでは，$r = 1$ の場合に，P-$\mathcal{K}$-codimension が4以下のものの分類結果を報告する．P-$\mathcal{K}$-codimension を4以下としたのは，R. Thom 氏が初等カタストロフの分類の折に right-codimension を4以下としたという歴史的動機以外になにもない。

従って，もっと P-$\mathcal{K}$-codimension が高いものまで，分類する

必要はもちろん大いにある.

定理6. $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ $(n\geq p)$ を P-K-codim(f) が4以下の C^∞-写像芽とする.

1) f が原点において Σ^1_0-型をもつとき, f は以下の写像芽のいずれかに P-K-同値である.

P-K-codimension	標準型
0	$(x_1,\cdots,x_{p-1},\ u+Q(x_p,\cdots,x_n))$
1	$(x_1,\cdots,x_{p-1},\ u+x_p^3+Q(x_{p+1},\cdots,x_n))$
2	$(x_1,\cdots,x_{p-1},\ u\pm x_p^4+Q(x_{p+1},\cdots,x_n))$
3	$(x_1,\cdots,x_{p-1},\ u+x_p^5+Q(x_{p+1},\cdots,x_n))$
4	$(x_1,\cdots,x_{p-1},\ u+x_p^3+x_{p+1}^3+Q(x_{p+2},\cdots,x_n))$
	$(x_1,\cdots,x_{p-1},\ u+x_p^3-x_p x_{p+1}^2+Q(x_{p+2},\cdots,x_n))$
4	$(x_1,\cdots,x_{p-1},\ u\pm x_p^6+Q(x_{p+1},\cdots,x_n))$
	$(x_1,\cdots,x_{p-1},\ u\pm(x_p^2x_{p+1}+x_{p+1}^4)+Q(x_{p+2},\cdots,x_n))$

2). f が原点において Σ^1_1-型をもつとき, f は以下の写像芽のいずれかに P-K-同値である.

P-$\mathcal{K}$-codimension	標準型
1	$(x_1,\dots,x_{p-1}, \pm u^2 + Q(x_p,\dots,x_n))$
2	$(x_1,\dots,x_{p-1}, u^3 + Q(x_p,\dots,x_n))$
	$(x_1,\dots,x_{p-1}, \pm u^2 + x_p^3 + Q(x_{p+1},\dots,x_n))$
	$(x_1,\dots,x_{p-1}, x_p^3 \pm u x_p + Q(x_{p+1},\dots,x_n))$
3	$(x_1,\dots,x_{p-1}, \pm u^4 + Q(x_p,\dots,x_n))$
	$(x_1,\dots,x_{p-1}, u^3 + x_p^3 + Q(x_{p+1},\dots,x_n))$
	$(x_1,\dots,x_{p-1}, x_p^4 \pm u x_p + Q(x_{p+1},\dots,x_n))$
4	$(x_1,\dots,x_{p-1}, u^5 + Q(x_p,\dots,x_n))$
	$(x_1,\dots,x_{p-1}, x_p^5 \pm u x_p + Q(x_{p+1},\dots,x_n))$.

ここで, $Q(x_i,\dots,x_n) = \pm x_i^2 \pm \cdots \pm x_n^2$.

注意： P-$\mathcal{K}$-codim$(f) \leq 4$ なるものには，上記の他，Σ_0^5, Σ_0^4, Σ_0^3, Σ_0^2, Σ_1^4, Σ_1^3, Σ_1^2 の各型がある．従って完全に分類するにはこれら各型の分類を行なう必要がある．

また，これらの分類がいかなる現象のモデルになるかは，その方面の研究者の判断が必要であろう．

以上．

文献

[1] G. Debreu : Ecess demand functions, J. Math. Econom. 1 (1974), 15-22.

[2] M. Golubitsky and D. Schaeffer : A theory for imperfect bifurcation via singularity theory, Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 21-98.

[3] E. C. Zeeman : Euler buckling in Structural Stability, in the Theory of Catastrophes, and Applications in the Science, Lecture Notes in Math., No. 525, Springer (1976), 373-395.